INTEGRADOR DE FECHA 6 / 8 / 08 Tema 1

1- Circulación de $\overline{f(x,y)}=(x,e^{(x-y)^2})$ **a lo largo de la frontera de la región** $D=\{(x,y)/1\le x+y\le 4\ ,\ -1\le x-y\le 1\}$**.**

- Solución:

Aplicando el teorema de Green puesto que se verifican las hipótesis, tenemos:

$$\text{Circul.} = \iint_D e^{(x-y)^2}\,2(x-y)\ dx\,dy$$

Hacemos $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ donde $1\le u\le 4$; $-1\le v\le 1$ y el Jacobiano de esta transformación es : $J\left(\dfrac{u,v}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2$, entonces el Jacobiano en valor absoluto es

$$\left|J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right|=|-2|=2=\frac{1}{\left|J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)\right|} \quad\Rightarrow\quad \underline{\left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right|=\frac{1}{2}}\ .$$

Se puede sacar también del cambio de variables encontrando *x, y* en función de *u, v*, de la forma siguiente:

$$\begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \left|J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)\right|=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\|=\left|-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\text{Circul.} = \int_1^4 du\int_{-1}^1 e^{v^2}\,2v\ \frac{1}{2}\ dv=\frac{1}{2}\int_1^4 \left[e^{v^2}\right]_{-1}^{1}\ du=\frac{1}{2}\int_1^4 (e-e)\ du=0$$

2- Dado $\overline{f}(x,y)=(x,\ e^x-y)$ **determine la línea de campo que pasa por (1,** ***e*****)**
Solución:

$$\frac{dy}{e^x-y}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad x\ dy=(e^x-y)\,dx \quad\Rightarrow\quad (e^x-y)\,dx-x\,dy=0$$

$$Como\ \ \frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad Es\ una\ Ecuación\ \ Diferencial\ \ Exacta$$

Encontramos la función potencial:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^x - y \quad \Rightarrow \quad \phi = \int (e^x - y)\, dx = e^x - y\, x + C(y)$$

derivando respecto de "y": $\frac{\partial \phi}{\partial y} = -x + C'(y) = -x \quad \Rightarrow \quad C'(y) = 0 \quad \Rightarrow C(y) = k$

$\Rightarrow \ \phi(x,y) = e^x - y\, x + k \quad \Rightarrow$ *Solución*: $e^x - y\, x = K$

Pasa por (1, e), entonces: $e^1 - e.1 = K \quad \Rightarrow \quad K = 0$

Respuesta: La línea de campo es $e^x - y\, x = 0$ o $y = \frac{e^x}{x}$

Observación: También la ecuación es lineal, así que puede ser resuelta por ese método.

3- Hallar la circulación de $\overline{F}(x,y,z) = (x - y^2, y, y\, z - \frac{x^2}{4})$ a lo largo de la curva *C*, dada por la intersección del plano tangente a la superficie $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ en el punto (1, 1, 1) con los planos coordenados.

Solución: El plano tangente es: $N . (x-1\, , y-1\, , z-1) = 0$ siendo N la normal al plano, que es la normal a la superficie.

Para determinar N definimos la función $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4$, la superficie de nivel 0 de f es $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$, el gradiente de f es un vector normal a la superficie y por lo tanto normal al plano tangente.

Encontramos *N*:

$$\nabla f = (2x, 4y, 2z) \quad \Rightarrow \quad \nabla f\,(1,1,1) = (2\, , 4\, , 2) = 2\,(1\, , 2\, , 1)$$

De donde $N = (1\, , 2\, , 1)$, entonces la ecuación del plano tangente es:

$$(1,2,1) . (x-1, y-1, z-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 + 2y - 2 + z - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{x + 2y + z = 4}$$

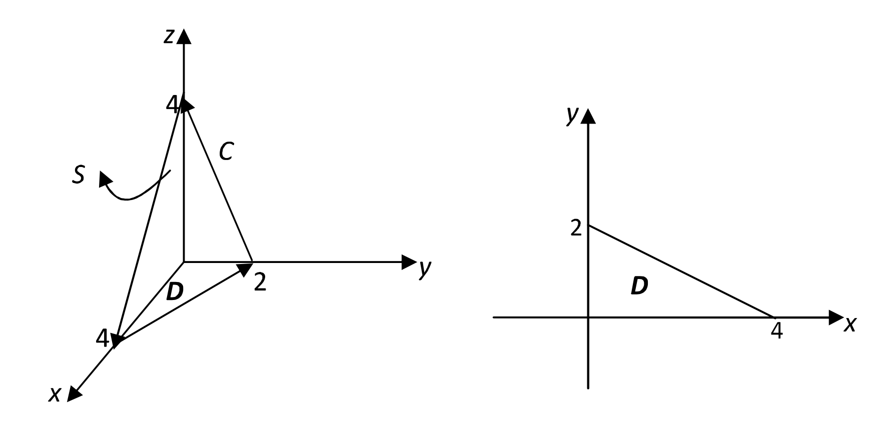
Para calcular la circulación se usa el teorema de Stokes pues se verifican las hipótesis (verifícalas). Este teorema relaciona una integral de línea con una de superficie y dice que, bajo ciertas condiciones, la circulación de $\overline{F}$ a lo largo de *C* es igual al flujo del rotor del campo a través de la superficie *S,* es decir: $\int_C \overline{F}(x,y,z) . \overline{ds} = \iint_S \nabla \times \overline{F} \ . \breve{n}\ ds$

donde *S* es una superficie abierta y *C* la curva frontera de *S.*

El rotor de $\overline{F}$ es: $\nabla\times\overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-y^2 & y & yz-\dfrac{x^2}{4} \end{vmatrix} = (z\ ,\ \dfrac{x}{2}\ ,\ 2y\ )$

$$\int_C \overline{F}(x,y,z)\ .\ \overline{ds} = \iint_S \nabla\times\overline{F}\ .\ \breve{n}\ ds$$

$$= \iint_D (z\ ,\ \frac{x}{2}\ ,\ 2y)\ .\ (1{,}2{,}1)\ dx\ dy = \iint_D 4\ dx\ dy = 4Area(D) = 4\ .\ 4 = 16$$



4. Hallar flujo de $\overline{F}(x,y,z) = (x+e^z \quad sen(xz)+y\ ,\ yx+z)$ a través de la frontera del cuerpo $K = \{(x,y,z)/\,z^2 \geq x^2+y^2;\ x^2+y^2+z^2 \leq 4\ ;\ z \geq 0\}$, considerando normal saliente.

Solución: Usando Teorema de la divergencia, previo verificar hipótesis, tenemos:

$$Flujo = \iint \overline{F}\ .\ \breve{n}\ ds = \iiint_K div(\overline{F})\ dx\ dy\ dz = \iiint_K 3\ dx\ dy\ dz$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho^2\ sen(\varphi)\ d\rho = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} sen(\varphi) \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 d\varphi =$$

$$= 3\,.\frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\theta\ \left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\pi/4} = 8\int_0^{2\pi} \left[(-\cos(\pi/4)-(-\cos(0)\right]\ d\theta =$$

$$= 8\int_0^{2\pi} (-\frac{\sqrt{2}}{2}+1)\ d\theta = 8\ (\frac{-\sqrt{2}+2}{2})\ .\ 2\pi = (-8\sqrt{2}+16)\ \pi$$

Observación: El cuerpo K es el que está por encima del cono y debajo de la esfera. Se resuelve el ejercicio pasando a coordenadas esféricas. Haga una representación gráfica para ver como salen los límites.

5. Calcular la circulación de $\overline{G}(x,y) = (f_{xx}\ ,\ f_{xy})$ a lo largo del segmento $\overline{AB}$ (desde A hacia B), siendo f de clase C^{∞} en R^2 y sabiendo que:

i) f tiene extremo local en A.

ii) $T_2(x,y) = 1 + x - 2y^2$ **es el polinomio de Taylor de orden 2 de f en B.**

Solución:

El campo dado es el gradiente de f'_x , es decir, $\overline{G}(x,y) = \nabla(f'_x)$, por lo tanto f'_x es el potencial de $\overline{G}$. La circulación es:

$$\int_{AB} \overline{G}(x,y)\ .\ \overline{ds} = \int_{AB} \nabla(f'_x)\ .\ \overline{ds} = f'_x(B) - f'_x(A) = 1 - 0 = 1$$

Estos valores resultan de: **1)** $f'_x(A) = 0$ pues f tiene extremo en A (A punto Estacionario).

2) $f'_x(B) = (T_2)'_x(B) = 1$